

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{13} n}{\sqrt[3]{n}} \sin \frac{\pi n}{6}$$

$\begin{matrix} \text{"}a_n\text{"} & \text{"}b_n\text{"} \end{matrix}$

(a) označme $f(x) = \frac{\log^{13} x}{\sqrt[3]{x}}$, $x \in (1, \infty)$. Potom $f'(x) = \frac{13 \cdot \log^{12} x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{3}} - \log^{13} x \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\log^{12} x}{x^{\frac{2}{3}}} \left(13 - \frac{1}{3} \log x \right)$.

Dále $\frac{\log^{12} x}{x^{\frac{2}{3}}} \geq 0$ na $(1, \infty)$ a protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$ existuje $N \in \mathbb{N}$, že $13 - \frac{1}{3} \log x < 0$ pro $x \in [N, \infty)$.

celkem $f' < 0$ na $[N, \infty)$ a tedy f je klesající a nezáporná na $[N, \infty)$.

Dále $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Protože $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí $a_n \geq 0$.

Dále řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezené částečné součty (tvrzení ze cvičení)

Dostáváme tedy, že $\sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n$ konverguje (AD kritérium - Dirichletova podmínka)

Celkem tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n b_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n \right)$

(b) pro $k \in \mathbb{N}$ platí $b_{3+12k} = \sin\left(\frac{3+12k}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Označme $t_n = \sum_{k=1}^n |a_k b_k|$. Potom

$$t_{3+12n} = \sum_{k=1}^{3+12n} |a_k b_k| \geq \sum_{k=1}^n |a_{3+12k}| \cdot |b_{3+12k}| = \sum_{k=1}^n a_{3+12k} = \sum_{k=1}^n \frac{\log^3(3+12k)}{\sqrt[3]{3+12k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{3+12k}}$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} C_k = \infty$ Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{3+12n} = \infty$ a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \infty$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tedy nekonverguje absolutně